

Profile and Contacts

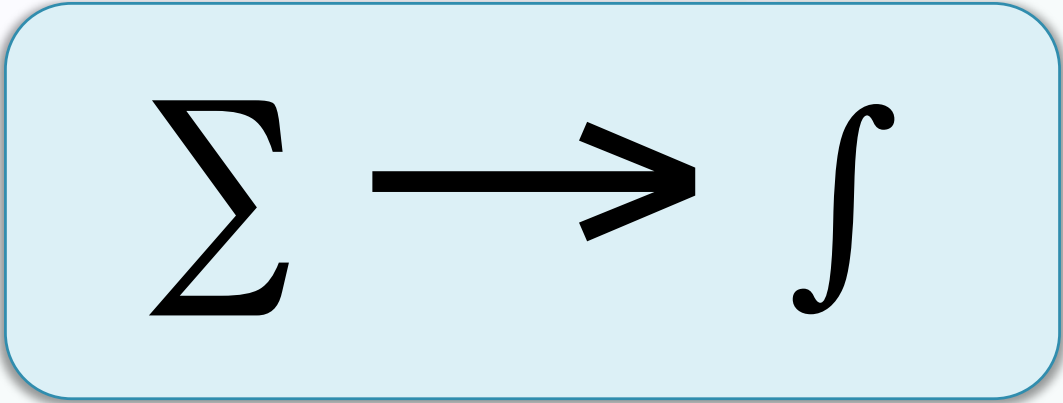
- Author: Fei Zhao
- Student ID: 085739E
- Email: e085739@ie.u-ryukyu.ac.jp
- PDF Download: <http://bit.ly/semi-ps3>
- Date: 2011/06/14 (TUE)

目次

4.5 期待値, 分散, 標準偏差.....	156
4.6 正規分布と中心極限定理.....	161

4.5.1 期待値 (1/7)

確率 \rightarrow 確率密度



A diagram illustrating the transition from discrete probability to continuous probability. It features a light blue rounded rectangular box containing a large black summation symbol (Σ) on the left, a large black right-pointing arrow (\rightarrow) in the center, and a large black integral symbol (\int) on the right.

4.5.1 期待値 (2/7)

連続型確率分布の期待値の求め方:

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx$$

$$E[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_X(x) dx$$

$$E[h(X, Y)] = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} h(x, y) f_{X, Y}(x, y) dx \right) dy$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} h(x, y) f_{X, Y}(x, y) dy \right) dx$$

$$E[h(X, Y, Z)] = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} h(x, y, z) f_{X, Y, Z}(x, y, z) dx \right) dy \right) dz$$

4.5.1 期待値 (3/7)

例題1: 確率変数 X の確率密度関数,

$$f_X(x) = \begin{cases} 2x(0 \leq x \leq 1) \\ 0(\text{otherwise}) \end{cases}$$

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} xf_X(x)dx$$

$$= \int_0^1 x(2x)dx = \int_0^1 2x^2 dx = \left[\frac{2}{3} x^3 \right]_0^1$$

$$= \frac{2}{3}$$

4.5.1 期待値 (4/7)

例題1: 確率変数 X の確率密度関数,

$$f_X(x) = \begin{cases} 2x(0 \leq x \leq 1) \\ 0(\text{otherwise}) \end{cases}$$

また, $g(x) = x^2$ において,

$$E[X^2] = E[g(X)]$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_X(x) dx$$

$$= \int_0^1 x^2 (2x) dx = \int_0^1 2x^3 dx$$

$$= \left[\frac{1}{2} x^4 \right]_0^1 = \frac{1}{2}$$

4.5.1 期待値 (5/7)

例題2: 確率変数 X, Y の同時分布の確率密度関数 $f_{X,Y}(x,y)$ が次式で与えられるとき, $E[XY]$ を求めよ.

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} x+y & (0 \leq x \leq 1, \text{ and } 0 \leq y \leq 1) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

答え:

$h(x,y) = xy$ とおいて,

4.5.1 期待値 (6/7)

例題2 の続き:

$$\begin{aligned} E[XY] &= E[h(X,Y)] = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} h(x,y) f_{X,Y}(x,y) dx \right) dy \\ &= \int_0^1 \left(\int_0^1 xy(x+y) dx \right) dy = \int_0^1 \left(\int_0^1 x^2 y + xy^2 dx \right) dy \\ &= \int_0^1 \left[\frac{1}{3} yx^3 + \frac{1}{2} y^2 x^2 \right]_{x=0}^{x=1} dy = \int_0^1 \left(\frac{1}{3} y + \frac{1}{2} y^2 \right) dy \\ &= \left[\frac{1}{6} y^2 + \frac{1}{6} y^3 \right]_{y=0}^{y=1} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

4.5.1 期待値 (7/7)

確率変数 X の期待値の基本性質:

$$E[3X] = 3E[X]$$

$$E[X + 3] = E[X] + 3$$

$$E[X + Y] = E[X] + E[Y]$$

X, Y が独立なら,

$$E[XY] = E[X]E[Y]$$

4.5.2 分散, 標準偏差

期待値さえ定義されれば, 分散や標準偏差はストレート

分散:

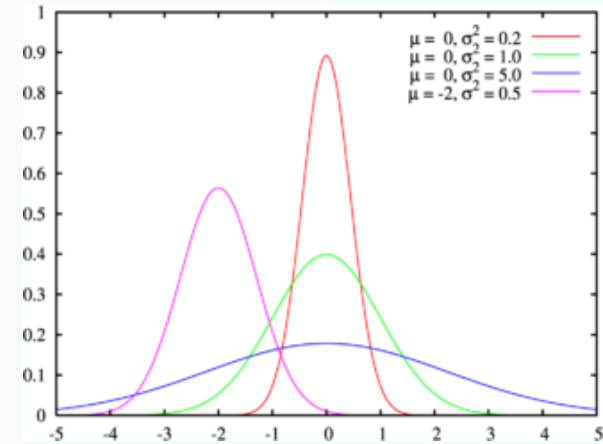
$$\begin{aligned} V[X] &= E[(X - \mu)^2] \\ &= E[X^2] - E[X]^2 \end{aligned}$$

標準偏差:

$$\sigma = \sqrt{V[X]}$$

4.6.1 一般の正規分布

左右対称釣鐘型の密度関数を持つ分布



確率密度関数

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\}, -\infty < x < \infty$$

期待値と分散

$$E[X] = \mu, V[X] = \sigma^2$$

4.6.2 標準正規分布

標準化変数

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

密度関数

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{z^2}{2}\right\}, -\infty < z < \infty$$

期待値と分散

$$E[Z] = 0, V[Z] = 1$$

4.6.3 中心極限定理

互いに独立な確率変数 X_1, X_2, \dots, X_n が平均 μ , 分散 σ^2 の同一な確率分布に従うとき, 確率変数

$$Y = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

は $n \rightarrow \infty$ のとき $N(0,1)$ に従う.

始めの確率分布が何であっても, 同一な分布に従っている限り n を十分大きくとれば

\bar{X} はほぼ $N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$ に従う.

END

ご清聴, ありがとうございます.