Profile and Contacts

- Author: Fei Zhao
- Student ID: 085739E
- Email: e085739@ie.u-ryukyu.ac.jp

- PDF Download: http://bit.ly/semi-ps3
- Date: 2011/06/14 (TUE)

目次

4.5.1 期待値 (1/7)

確率 -> 確率密度

$$\sum \longrightarrow \int$$

4.5.1 期待値 (2/7)

連続型確率分布の期待値の求め方:

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx$$

$$E[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_X(x) dx$$

$$E[h(X,Y)] = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} h(x,y) f_{X,Y}(x,y) dx \right) dy$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} h(x,y) f_{X,Y}(x,y) dy \right) dx$$

$$E[h(X,Y,Z)] = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} h(x,y,z) f_{X,Y,Z}(x,y,z) dx \right) dy \right) dz$$

4.5.1 期待値 (3/7)

例題1: 確率変数Xの確率密度関数,

$$f_X(x) = \begin{cases} 2x(0 \le x \le 1) \\ 0(otherwise) \end{cases}$$

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx$$

$$= \int_0^1 x(2x)dx = \int_0^1 2x^2 dx = \left[\frac{2}{3}x^3\right]_0^1$$

$$= \frac{2}{3}$$

4.5.1 期待値 (4/7)

例題1: 確率変数Xの確率密度関数,

$$f_X(x) = \begin{cases} 2x(0 \le x \le 1) \\ 0(otherwise) \end{cases}$$

また, $g(x) = x^2$ とおいて,

$$E[X^2] = E[g(X)]$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_X(x) dx$$

$$= \int_0^1 x^2 (2x) dx = \int_0^1 2x^3 dx$$

$$= \left[\frac{1}{2} x^4 \right]_0^1 = \frac{1}{2}$$

4.5.1 期待値 (5/7)

例題2: 確率変数 X,Y の同時分布の確率密度関数 $f_{X,Y}(x,y)$ が次式で与えられるとき, $E[XY]$ を求めよ.

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} x+y\,(0 \le x \le 1, and\, 0 \le y \le 1) \\ 0\,(otherwise) \end{cases}$$

答え:

$h(x,y) = xy$ とおいて,

4.5.1 期待値 (6/7)

例題2 の続き:

$$E[XY] = E[h(X,Y)] = \int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} h(x,y) f_{X,Y}(x,y)dx\right)dy$$

$$= \int_{0}^{1}\left(\int_{0}^{1} xy(x+y)dx\right)dy = \int_{0}^{1}\left(\int_{0}^{1} x^2y + xy^2 dx\right)dy$$

$$= \int_{0}^{1}\left[\frac{1}{3}yx^3 + \frac{1}{2}y^2x^2\right]_{x=0}^{x=1} dy = \int_{0}^{1}\left(\frac{1}{3}y + \frac{1}{2}y^2\right)dy$$

$$= \left[\frac{1}{6}y^2 + \frac{1}{6}y^3\right]_{y=0}^{y=1} = \frac{1}{3}$$

4.5.1 期待値 (7/7)

確率変数 X の期待値の基本性質:

$$E[3X] = 3E[X]$$

$$E[X+3] = E[X] + 3$$

$$E[X+Y] = E[X] + E[Y]$$

X,Y が独立なら,

$$E[XY] = E[X]E[Y]$$

4.5.2 分散, 標準偏差

期待値さえ定義されれば, 分散や標準偏差はストレート

分散:

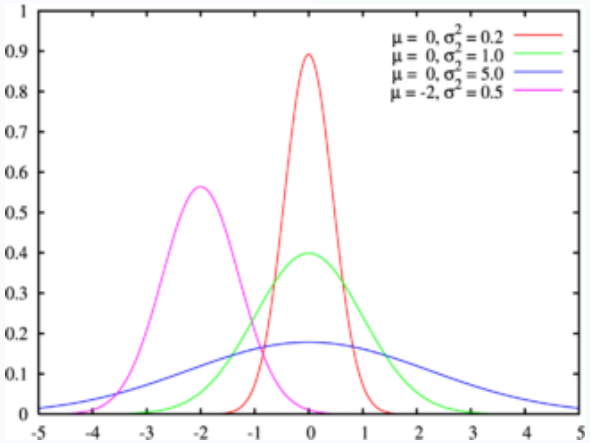
$$V[X] = E[(X-\mu)^2]$$
$$= E[X^2] - E[X]^2$$

標準偏差:

$$\sigma = \sqrt{V[X]}$$

4.6.1 一般の正規分布

左右対称釣鐘型の密度関数を持つ分布



確率密度関数

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{ -\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2} \right\}, -\infty < x < \infty$$

期待値と分散

$$E[X] = \mu, V[X] = \sigma^2$$

4.6.2 標準正規分布

標準化変数

$$Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$$

密度関数

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{z^2}{2}\right\}, -\infty < z < \infty$$

期待値と分散

$$E[Z] = 0, V[Z] = 1$$

4.6.3 中心極限定理

互いに独立な確率変数 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ が平均 μ，分散 σ^2 の同一な確率分布に従うとき，確率変数

$$Y = \frac{\overline{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

は $n \to \infty$ のとき $N(0,1)$ に従う.

始めの確率分布が何であっても，同一な分布に従っている限り n を十分大きくとれば

$\overline{X}$ はほぼ $N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$ に従う.

END

ご清聴，ありがとうございました.